TRABAJO EN GRUPO

Movimiento armónico simple

Se considera un resorte de longitud l, y masa despreciable, en posición vertical con un extremo fijo y el otro suspendido en el aire. Cuando se coloca una masa m en el extremo libre del resorte se produce un movimiento oscilatorio hasta que el sistema alcanza la posición de reposo. En dicho momento, el resorte ejerce una fuerza hacia arriba igual al peso de la masa ($W = mg$, donde $g = 9,8m^2/s$). Si la constante de elasticidad del resorte es k y el resorte se estira Δl con la masa suspendida, entonces

$$k\Delta l = mg.$$

Se denota por $y(t)$ el desplazamiento de la masa respecto a su posición de reposo. Se desplaza la masa hasta una distancia y_0 de la posición de reposo en el instante $t = 0$ y a continuación se suelta con una velocidad inicial y_1, entonces la masa comenzará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio.

En cada instante t la fuerza que produce el desplazamiento, según la ley de Newton, es $F = ma = my''(t)$. Esta fuerza es la resultante de todas las fuerzas que en dicho instante actúan sobre la masa. Si suponemos que el medio donde se mueve la masa no ejerce una fuerza de rozamiento, entonces la única fuerza que actúa es la ejercida por el resorte que, según la ley de Hooke, es igual a la constante de elasticidad por el desplazamiento (en dirección contraria). Así,

$$-ky(t) = my''(t)$$

Las soluciones reales de esta ecuación lineal son de la forma

$$y(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. El movimiento es periódico con período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y frecuencia de oscilación $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Si introducimos la *frecuencia angular* $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, las soluciones tienen la forma

$$y(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Se suelen expresar del modo

$$y(t) = A \operatorname{sen}(wt - \phi) \qquad \text{o} \qquad y(t) = A\cos(wt - \varphi)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ es la *amplitud* (desplazamiento máximo) y ϕ es la constante *ángulo de fase*, definido por $\cos\phi = \frac{c_1}{A}$ y $\operatorname{sen}\phi = \frac{c_2}{A}$, esto es, $\tan\phi = \frac{c_2}{c_1}$.

Ejercicio 1: Una masa que pesa 100kg se sujeta a un resorte suspendido del techo y ocasiona que el resorte se estire 20 cm al llegar al reposo en equilibrio. Se desplaza la masa hasta un punto que está 5cm por debajo de la posición de equilibrio y en el instante $t = 0$ se suelta con una velocidad inicial cero. Determinar el movimiento armónico simple de la masa, junto con su amplitud, periodo y frecuencia natural. Trazar la gráfica del movimiento.

Movimiento libre amortiguado

En el movimiento armónico simple se asume ausencia de fuerzas de resistencia al movimiento debidas a la viscosidad del medio (la masa puede estar sumergida en el agua, tener

un dispositivo que amortigua la aceleración, etc.). Suponemos que la fuerza de rozamiento es proporcional, con constante b, a la velocidad del movimiento. En el movimiento libre amortiguado actúan dos fuerzas en dirección opuesta al desplazamiento, la del resorte y la de rozamiento y, por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$my''(t) = -ky(t) - by'(t).$$

Equivalentemente

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

El ecuación característica es $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$. La raíces son:

$$\frac{-b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}$$

Describir y analizar el movimiento y en cada uno de los siguientes casos:

- Si $b^2 < 4mk$ se produce un movimiento oscilatorio o subamortiguado.
- Si $b^2 = 4mk$ se produce un movimiento críticamente amortiguado-
- Si $b^2 > 4mk$ se produce un movimiento sobreamortiguado.

Ejercicio 2: Una masa que pesa 2kg se sujeta a un resorte suspendido del techo y ocasiona que el resorte se estire 49 cm al llegar al reposo en equilibrio. La constante de amoriguación del sistema es $b = 8\sqrt{5}$ kg/seg. Se desplaza la masa hasta un punto que está 10 cm por debajo de la posición de equilibrio y en el instante $t = 0$ se suelta con una velocidad inicial 2m/seg dirigida hacia abajo. ¿cuál es el desplazamiento máximo que alcanzará por debajo de la posición de equilibrio?

La ecuación de Van der Pol

Describir la ecuación la ecuación de Van Der Pol que surge en teoría de circuitos eléctricos.

Ejercicio 3: Analizar el comportamiento cualitativo (estabilidad) del sistema de Van Der Pol en el punto crítico $(0,0)$, según los valores del parámetro μ:

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x' = y - \mu F(x) \\ y' = -x \end{cases} \quad ,$$

siendo $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$.